

Propagazione degli errori nelle quattro operazioni

Il problema

Partiamo da due grandezze misurate direttamente, nella forma consueta

$$a = \bar{a} \pm \Delta a, \quad b = \bar{b} \pm \Delta b,$$

dove $\bar{a}$ e $\bar{b}$ sono i valori nominali e Δa , Δb gli errori assoluti: il valore vero di a sta nell'intervallo $[\bar{a} - \Delta a, \bar{a} + \Delta a]$, e lo stesso per b . Conviene dare un nome agli estremi di questi intervalli,

$$a_{\max} = \bar{a} + \Delta a, \quad a_{\min} = \bar{a} - \Delta a, \quad b_{\max} = \bar{b} + \Delta b, \quad b_{\min} = \bar{b} - \Delta b,$$

Da a e b ricaviamo una grandezza indiretta c con una delle quattro operazioni, e tutte le formule di propagazione si dimostrano allo stesso modo: troviamo gli estremi di c nel caso peggiore e riscriviamo l'intervallo nella forma $c = \bar{c} \pm \Delta c$.

Per prodotto e quoziente supponiamo $\bar{a} > 0$, $\bar{b} > 0$, $0 \leq \Delta a < \bar{a}$ e $0 \leq \Delta b < \bar{b}$: entrambi gli intervalli restano positivi e quello del denominatore non contiene zero. Gli errori relativi sono $\Delta a/\bar{a}$ e $\Delta b/\bar{b}$; le formule al primo ordine richiedono che siano piccoli rispetto a 1.

La somma: $c = a + b$

Il valore nominale è $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$. La somma cresce al crescere di ciascun addendo: il massimo si ottiene con entrambe le grandezze al massimo, il minimo con entrambe al minimo. Per il massimo:

$$\begin{aligned} c_{\max} &= (\bar{a} + \Delta a) + (\bar{b} + \Delta b) \\ &= (\bar{a} + \bar{b}) + (\Delta a + \Delta b) = \bar{c} + (\Delta a + \Delta b), \end{aligned}$$

e allo stesso modo $c_{\min} = \bar{c} - (\Delta a + \Delta b)$. L'intervallo di c è esattamente simmetrico rispetto a $\bar{c}$, quindi

$$\boxed{\Delta c = \Delta a + \Delta b} \quad \text{cioè} \quad c = (\bar{a} + \bar{b}) \pm (\Delta a + \Delta b)$$

La differenza: $c = a - b$

Ora $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$, e il punto delicato è *quali* estremi accoppiare: $a - b$ cresce al crescere di a e *cala* al crescere di b , quindi gli estremi vanno accoppiati in modo incrociato. Per il massimo:

$$\begin{aligned} c_{\max} &= (\bar{a} + \Delta a) - (\bar{b} - \Delta b) \\ &= \bar{a} + \Delta a - \bar{b} + \Delta b \\ &= (\bar{a} - \bar{b}) + (\Delta a + \Delta b) = \bar{c} + (\Delta a + \Delta b). \end{aligned}$$

Il segno meno davanti alla parentesi cambia il segno a *entrambi* i termini, $-(\bar{b} - \Delta b) = -\bar{b} + \Delta b$: è qui che il meno della differenza fa entrare l'incertezza di b con il segno positivo. Allo stesso modo $c_{\min} = \bar{c} - (\Delta a + \Delta b)$, e di nuovo

$$\boxed{\Delta c = \Delta a + \Delta b} \quad \text{cioè} \quad c = (\bar{a} - \bar{b}) \pm (\Delta a + \Delta b)$$

Sottrarre due misure non *compensa* gli errori: anche sottraendo, le incertezze si sommano, perché il caso peggiore è quello in cui i due errori spingono in versi opposti.

Il prodotto: $c = ab$

Con le ipotesi fatte i fattori restano positivi, e il prodotto cresce al crescere di ciascuno: gli estremi si accoppiano nello stesso verso. Per il massimo:

$$\begin{aligned}c_{\max} &= a_{\max} b_{\max} = (\bar{a} + \Delta a)(\bar{b} + \Delta b) \\&= \bar{a} \bar{b} + \bar{a} \Delta b + \bar{b} \Delta a + \Delta a \Delta b.\end{aligned}$$

Ora raccogliamo $\bar{a} \bar{b}$: ciascuno degli ultimi tre termini lo dividiamo per $\bar{a} \bar{b}$, così che compaiano gli errori relativi:

$$\begin{aligned}c_{\max} &= \bar{a} \bar{b} + \bar{a} \bar{b} \left(\frac{\bar{a} \Delta b}{\bar{a} \bar{b}} + \frac{\bar{b} \Delta a}{\bar{a} \bar{b}} + \frac{\Delta a \Delta b}{\bar{a} \bar{b}} \right) \\&= \bar{a} \bar{b} + \bar{a} \bar{b} \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}} + \frac{\Delta a}{\bar{a}} \cdot \frac{\Delta b}{\bar{b}} \right).\end{aligned}$$

Nell'ultima riga sono comparsi gli errori relativi. L'ultimo termine è il prodotto di due errori relativi: se questi sono piccoli — con errori dell'1% vale 0,01% — è un termine di secondo ordine, che trascuriamo rispetto agli altri due:

$$c_{\max} \simeq \bar{a} \bar{b} + \bar{a} \bar{b} \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}} \right).$$

Per il minimo il ragionamento è lo stesso:

$$\begin{aligned}c_{\min} &= a_{\min} b_{\min} = (\bar{a} - \Delta a)(\bar{b} - \Delta b) \\&= \bar{a} \bar{b} - \bar{a} \Delta b - \bar{b} \Delta a + \Delta a \Delta b \\&= \bar{a} \bar{b} - \bar{a} \bar{b} \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}} - \frac{\Delta a}{\bar{a}} \cdot \frac{\Delta b}{\bar{b}} \right) \\&\simeq \bar{a} \bar{b} - \bar{a} \bar{b} \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}} \right),\end{aligned}$$

dove il passaggio a $\simeq$ trascura ancora, e solo, il termine di secondo ordine. Il valore nominale del prodotto è $\bar{c} = \bar{a} \bar{b}$, e i due estremi si scrivono

$$c_{\max} \simeq \bar{c} + \bar{c} \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}} \right), \quad c_{\min} \simeq \bar{c} - \bar{c} \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}} \right).$$

Confrontando con la forma $c = \bar{c} \pm \Delta c$ si riconosce l'incertezza del prodotto:

$$\Delta c \simeq \bar{c} \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}} \right).$$

Dividendo per $\bar{c}$ si ottiene la forma relativa:

$$\boxed{\frac{\Delta c}{\bar{c}} \simeq \frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}}}$$

e, sostituendo $\bar{c} = \bar{a} \bar{b}$ e svolgendo la parentesi, quella assoluta:

$$\Delta c \simeq \bar{a} \bar{b} \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}} \right) = \bar{b} \Delta a + \bar{a} \Delta b,$$

cioè

$$\boxed{\Delta c \simeq \bar{b} \Delta a + \bar{a} \Delta b}$$

Sono le formule cercate, valide al primo ordine: l'unico termine trascurato è $\frac{\Delta a}{\bar{a}} \cdot \frac{\Delta b}{\bar{b}}$, piccolo rispetto a quelli conservati.

Il quoziente: $c = a/b$

Con le ipotesi fatte il denominatore resta positivo e diverso da zero. Il rapporto è massimo quando il numeratore è massimo e il denominatore è minimo. Mettiamo in evidenza $\bar{a}$ e $\bar{b}$, così che compaiano gli errori relativi:

$$\begin{aligned} c_{\max} &= \frac{a_{\max}}{b_{\min}} = \frac{\bar{a} + \Delta a}{\bar{b} - \Delta b} \\ &= \frac{\bar{a} \left(1 + \frac{\Delta a}{\bar{a}}\right)}{\bar{b} \left(1 - \frac{\Delta b}{\bar{b}}\right)} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \cdot \frac{1 + \frac{\Delta a}{\bar{a}}}{1 - \frac{\Delta b}{\bar{b}}}. \end{aligned}$$

Il denominatore $1 - \frac{\Delta b}{\bar{b}}$ è scomodo: moltiplichiamo numeratore e denominatore per $1 + \frac{\Delta b}{\bar{b}}$, così che al denominatore si formi una differenza di quadrati:

$$\begin{aligned} c_{\max} &= \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \cdot \frac{1 + \frac{\Delta a}{\bar{a}}}{1 - \frac{\Delta b}{\bar{b}}} \cdot \frac{1 + \frac{\Delta b}{\bar{b}}}{1 + \frac{\Delta b}{\bar{b}}} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\Delta a}{\bar{a}}\right) \left(1 + \frac{\Delta b}{\bar{b}}\right)}{1 - \left(\frac{\Delta b}{\bar{b}}\right)^2} \\ &= \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \cdot \frac{1 + \frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}} + \frac{\Delta a}{\bar{a}} \cdot \frac{\Delta b}{\bar{b}}}{1 - \left(\frac{\Delta b}{\bar{b}}\right)^2}. \end{aligned}$$

Il prodotto dei due errori relativi e il quadrato dell'errore relativo di b sono termini di secondo ordine: se gli errori relativi sono piccoli possiamo trascurarli entrambi, separando poi il valore centrale:

$$c_{\max} \simeq \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \left(1 + \frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}}\right) = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} + \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}}\right).$$

Il rapporto è minimo quando il numeratore è minimo e il denominatore è massimo: il ragionamento è simmetrico, e si moltiplica numeratore e denominatore per $1 - \frac{\Delta b}{\bar{b}}$:

$$\begin{aligned} c_{\min} &= \frac{a_{\min}}{b_{\max}} = \frac{\bar{a} - \Delta a}{\bar{b} + \Delta b} = \frac{\bar{a} \left(1 - \frac{\Delta a}{\bar{a}}\right)}{\bar{b} \left(1 + \frac{\Delta b}{\bar{b}}\right)} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \cdot \frac{1 - \frac{\Delta a}{\bar{a}}}{1 + \frac{\Delta b}{\bar{b}}} \\ &= \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \cdot \frac{1 - \frac{\Delta a}{\bar{a}}}{1 + \frac{\Delta b}{\bar{b}}} \cdot \frac{1 - \frac{\Delta b}{\bar{b}}}{1 - \frac{\Delta b}{\bar{b}}} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\Delta a}{\bar{a}}\right) \left(1 - \frac{\Delta b}{\bar{b}}\right)}{1 - \left(\frac{\Delta b}{\bar{b}}\right)^2} \\ &= \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \cdot \frac{1 - \frac{\Delta a}{\bar{a}} - \frac{\Delta b}{\bar{b}} + \frac{\Delta a}{\bar{a}} \cdot \frac{\Delta b}{\bar{b}}}{1 - \left(\frac{\Delta b}{\bar{b}}\right)^2}. \end{aligned}$$

Trascurando, come per il massimo, i termini di secondo ordine:

$$c_{\min} \simeq \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \left(1 - \frac{\Delta a}{\bar{a}} - \frac{\Delta b}{\bar{b}}\right) = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} - \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}}\right).$$

Il valore nominale del quoziente è $\bar{c} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$, e i due estremi si scrivono

$$c_{\max} \simeq \bar{c} + \bar{c} \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}}\right), \quad c_{\min} \simeq \bar{c} - \bar{c} \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}}\right).$$

Confrontando con la forma $c = \bar{c} \pm \Delta c$ si riconosce

$$\Delta c \simeq \bar{c} \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}}\right),$$

la stessa espressione trovata per il prodotto. Dividendo per $\bar{c}$, la forma relativa:

$$\frac{\Delta c}{\bar{c}} \simeq \frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}}$$

e, sostituendo $\bar{c} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$ e svolgendo la parentesi, quella assoluta:

$$\Delta c \simeq \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \left(\frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}} \right) = \frac{\Delta a}{\bar{b}} + \frac{\bar{a} \Delta b}{\bar{b}^2},$$

cioè

$$\Delta c \simeq \frac{\Delta a}{\bar{b}} + \frac{\bar{a}}{\bar{b}^2} \Delta b$$

Anche queste valgono al primo ordine: i termini trascurati sono $\frac{\Delta a}{\bar{a}} \cdot \frac{\Delta b}{\bar{b}}$ e $\left(\frac{\Delta b}{\bar{b}}\right)^2$.

Le quattro formule a confronto

Grandezza	Incertezza di c	Natura del risultato
$a + b$	$\Delta c = \Delta a + \Delta b$	esatta
$a - b$	$\Delta c = \Delta a + \Delta b$	esatta
ab	$\Delta c \simeq \bar{b} \Delta a + \bar{a} \Delta b$	al primo ordine
$\frac{a}{b}$	$\frac{\Delta c}{\bar{c}} \simeq \frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}}$ $\Delta c \simeq \frac{\Delta a}{\bar{b}} + \frac{\bar{a}}{\bar{b}^2} \Delta b$ $\frac{\Delta c}{\bar{c}} \simeq \frac{\Delta a}{\bar{a}} + \frac{\Delta b}{\bar{b}}$	al primo ordine

Somma e differenza danno risultati esatti. Prodotto e quoziente danno, dopo aver trascurato i termini di secondo ordine, la stessa regola: gli errori relativi si sommano. Con incertezze di pochi punti percentuale — il caso normale nei problemi scolastici — l'approssimazione commessa è molto più piccola delle incertezze stesse.